数理解析研究所講究録
853巻 1993年 187-195

On the Construction of $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$-Codes Meeting the Griesmer Bound

大阪女子大学　浜　田　昇
ベルゲン大学　T. Helleseth
ベルゲン大学　Ø. Ytrehus

1. はじめに

雑音のある通信路を用いて通信文を送る場合を考える。この場合には、受け取った符号（受信符号）は必ずしも送った符号（送信符号）と一致しない。この雑音によるエラーを正しく訂正できるようにするためには、送りたい通信文を適当に符号化し、受け取った符号から送信符号を正しく推定（復号化）することが必要である。この論文では、符号化の方法として最もよく用いられているq元線形符号を考える。（符号化、復号化の方法については、MacWilliams and Sloane [53] を参照）

$V(n,q)$ をガロア体$GF(q)$上の行ベクトルからなるn次元ベクトル空間とし、Cを$V(n,q)$のk次元部分空間（$n>k\geqq 3$、qは素数または素数べき）とする。このとき、Cの最小ハミング距離がdであるならば、Cは $[n,k,d;q]$-code （または、符号長がn、次元がk，最小距離がdであるq元線形符号）であるという。

一様q元通信路（注意1.4参照）を用いて $[n,k,d;q]$-code Cの元（符号語）を送るとき、Cのどの元が送られるのも同様に確からしいならば、受信符号 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in V(n,q)$ から最尤推定法を用いて送信符号 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in C$ を推定（復号化）するとき、誤りの個数が $[(d-1)/2]$ 個以下であれば、誤りを正しく訂正できることが知られている。ここに $[x]$ はxを越えない最大の整数を表す。従って、与えられた整数 n, k, q に対して、最も多くの誤りを訂正できるq元線形符号を得るためには、$[n,k,*;q]$-code の中で、最小距離dが最も大きい $[n,k,d;q]$-code を求めればよい。この問題（"Packing problem" と呼ばれている）を解くためには、すべての整数 k, d, q に対して、次の問題を解けばよいことが知られている。

（問題1.1） k, d, q を与えられた整数とする。このとき、

（1） $[*,k,d;q]$-code の中で符号長nの最小値（この値を $n_q(k,d)$ で表す）を求めよ。

（2） $n=n_q(k,d)$ である $[n,k,d;q]$-code を求めよ。

与えられた整数 k, d, q に対して、$[n,k,d;q]$-code が存在するならば、

$$n \geqq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil \equiv g_q(k,d) \qquad \text{(Griesmer bound)} \qquad (1.1)$$

であることが知られている（cf. [18], [57]）。ただし、$\lceil x\rceil$ はxより小さくない最小の整数を表す。

与えられた整数 k, d, q に対して、Griesmer bound (1.1) の等号を満たす $[n,k,d;q]$-code C が存在するならば、$n_q(k\,d) = g_q(k,d)$ であるから、この場合には、問題1.1を解くためには、次の問題を解けばよい。

(問題1.2)　(1)　Griesmer bound (1.1) の等号を満たす [n, k, d; q]-code が存在するための k, d, q に対する必要十分条件を求めよ。

(2)　与えられた整数 k, d, q に対して、Griesmer bound (1.1) の等号を満たす [n, k, d; q]-code が存在する場合には、すべての [n, k, d; q]-code を構成し、その特徴付けをせよ。

$q = 2$, $1 \leqq d < 2^{k-1}$ の場合には、問題1.2 は Helleseth [48] によって完全に解かれた。従って、以下 $q \geqq 3$, $k \geqq 3$, $1 \leqq d < q^{k-1}$ の場合を考える。この場合にはdと (1.1) は次のように書き表すことができる。

$$d = q^{k-1} - \sum_{i=1}^{h} q^{\lambda_i} \tag{1.2}$$

$$n \geqq v_k - \sum_{i=1}^{h} v_{\lambda_i+1} \tag{1.3}$$

ただし, $v_i = (q^i-1)/(q-1)$ $(i \geqq 0)$ で, $h, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$ は 次の2つの条件 (a) と (b) を満たす整数である。

(a)　$1 \leqq h \leqq (k-1)(q-1)$, $0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_h < k-1$,

(b)　λ_i $(i = 1, 2, \cdots, h)$ のうち高々$q-1$個が同じ値をとる。

(定義1.1)　Fを有限射影幾何 PG(t, q) における f 個の点からなる集合とする。PG(t, q) のすべての hyperplane H に対して、$|F \cap H| \geqq m$ で、かつ、ある hyperplane H に対して、$|F \cap H| = m$ であるならば、Fは {f, m; t, q}-minihyper であるという。ただし、$t \geqq 2$, $f \geqq 1$, $m \geqq 0$, $|A|$ は集合Aに含まれる元の個数を表す。

Hamada [20] は d が (1.2) のように表される場合には、Griesmer bound (1.3) の等号を満たすすべての同値でない [n, k, d; q]-code からなる集合とすべての {f, m; k-1, q}-minihyper からなる集合との間には、1対1の対応があることを示した。(注2.1参照)　ただし、

$$f = \sum_{i=1}^{h} v_{\lambda_i+1}, \qquad m = \sum_{i=1}^{h} v_{\lambda_i}. \tag{1.4}$$

従って、d が (1.2) のように表される場合には、問題1.2 を解くためには次の問題を解けばよい。

(問題1.3)　(1)　$\{\sum_{i=1}^{h} v_{\lambda_i+1}, \sum_{i=1}^{h} v_{\lambda_i}; t, q\}$-minihyper が存在するための $t, q, h, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$ に対する必要十分条件を求めよ。

(2)　$\{\sum_{i=1}^{h} v_{\lambda_i+1}, \sum_{i=1}^{h} v_{\lambda_i}; t, q\}$-minihyper が存在する場合には、すべての minihyper を構成し、その特徴付けをせよ。

（目的） $k=5,\ q\geq 3,\ h=q+1,\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_{q+1}=2$ の場合には、（1．2），（1．3） 式は次のように表される。

$$d = q^4-\{2q+(q-1)q^2\} = q^4-q^3+q^2-2q \qquad (1.2')$$

$$n \geq v_5-\{2v_2+(q-1)v_3\} = q^4+q^2-q \qquad (1.3')$$

このとき、Griesmer bound (1.3') の等号を満たす $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$-code が存在するかどうかは q=3 の場合ですら未知であった。この論文の目的はこの code に対応する $\{2v_2+(q-1)v_3, 2v_1+(q-1)v_2; 4, q\}$-minihyper $(q\geq 3)$ を構成することによって、$[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$-code が存在することを示すことである。 主な結果は次の通りである。（詳細は、文献 [42] を参照）

（定理１） Ωを有限射影幾何 PG(4,q) における 3-flat, $\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_{q^2}, P\}$ をΩの中の (q^2+1)-cap, $\{P, P_1, P_2, \cdots, P_q\}$ を $\Omega\cap\{P, P_1, P_2, \cdots, P_q\}=\{P\}$ を満たす PG(4,q) の 1-flat とし、$F=(\Omega\setminus\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_{q^2}\})\cup\{P_1, P_2, \cdots, P_q\}$ とおくと、任意の素数または素数べき q (≧3) に対して、F は次の条件を満たす $\{2v_2+(q-1)v_3, 2v_1+(q-1)v_2; 4, q\}$-minihyper である。

（1） PG(4,q) の任意の 3-flat H に対して、$|F\cap H| = q^2+1,\ q^2+q+1,\ q^2+2q+1$, または, q^3+q+1 である。

（2） $m_1=q^2+1,\ m_2=q^2+q+1,\ m_3=q^2+2q+1,\ m_4=q^3+q+1$ とおき、$|F\cap H|=m_i$ となる PG(4,q) の 3-flat H の個数を x_i で表すと、$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (q^4-q,\ q^3+q^2+2q-1,\ 1,\ 1)$ である。

（定理２） 任意の素数または素数べき q (≧3) に対して、Griesmer bound (1.3') の等号を満たし、かつ、重み分布が $1+n_1z^{w_1}+n_2z^{w_2}+n_3z^{w_3}+n_4z^{w_4}$ である $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$-code が存在する．ただし、$w_1=q^4-q^3+q^2-2q$, $w_2=q^4-q^3+q^2-q$, $w_3=q^4-q^3+q^2$, $w_4=q^4-q$, $n_1=(q-1)(q^4-q)$, $n_2=(q-1)(q^3+q^2+2q-1)$, $n_3=q-1$, $n_4=q-1$ である。

（注１．１） 問題１．３ は、最近の一連の研究によって、次の場合には解かれている。

（１） $h=1$ の場合には、Tamari [58,59] によって解かれた。

（２） $h=2$ の場合には、Hamada [19,22] によって解かれた。

（３） $h=3$ の場合には、Hamada [19-22], Hamada-Deza [25], Hamada-Helleseth [29-36] によって完全に解かれた。

（４） $h=4,\ q>9$ の場合には、Hamada-Helleseth [37] によって完全に解かれた。

（５） $h=4,\ q\leq 9$ の場合には、Hamada-Deza [24,27,28], Hamada-Helleseth et al [32,39-43] によって解かれたが未解決の部分もある。(cf. 注意 1.2)

（６） $h\geq 5,\ q>(h-1)^2$ の場合には、Hamada-Helleseth [38] によって部分的に解かれた。

(<u>注1.2</u>)　$h=4,\ q \leqq 9$ の場合で未解決な部分は次の7つの場合である。

(α)　$h=4,\ 3 \leqq q \leqq 4,\ 1 \leqq \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1+1 < t$

(β_1)　$h=4,\ 3 \leqq q \leqq 9,\ 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < t$

(β_2)　$h=4,\ 3 \leqq q \leqq 9,\ 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < t$

(β_3)　$h=4,\ 3 \leqq q \leqq 9,\ 0 \leqq \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < t$

(γ_1)　$h=4,\ 4 \leqq q \leqq 9,\ 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < t$

(γ_2)　$h=4,\ 4 \leqq q \leqq 9,\ 0 \leqq \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < t$

(δ)　$h=4,\ 5 \leqq q \leqq 9,\ 1 \leqq \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < t$

(<u>注1.3</u>)　$q=3$ の場合には、定理2より、重み分布が

$$1 + 156z^{57} + 82z^{60} + 2z^{63} + 2z^{78}$$

であり、かつ、Griesmer bound の等号を満たす [87,5,57;3]-code が存在する。
最近の一連の結果については、Hamada [22,23] を参照のこと。

(<u>注1.4</u>)　送信符号を $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C$，受信符号を $(x_1+e_1, x_2+e_2, \cdots, x_n+e_n) \in V(n,q)$ とするとき、n個のエラー $e_1, e_2, \cdots, e_n \in GF(q)$ は互いに独立で、同一の分布に従い、$e_i=0$ となる確率が $1-p$ (> 0.5)、$GF(q)$ の任意の非零元θに対して $e_i=\theta$ となる確率が $p/(q-1)$ であるとき、この通信路を <u>一様q元通信路</u> という。

(<u>注1.5</u>)　PG(3,q) における (q^2+1)-cap については、Bose [2], Hill [49], Qvist [56] を，また、問題1.1 に対する最近の結果については、Brouwer and Sloane [5], Hamada [23], Hill et al [17],[49]-[51] を参照のこと。

2．<u>予備的結果</u>

$W(k,q)$ をガロア体 $GF(q)$ 上の列ベクトルからなるk次元ベクトル空間とし、$S_{k,q}$ を $c_0=1$，または，ある整数 i $(1 \leqq i \leqq k-1)$ に対して、$c_0 = c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0$，$c_i = 1$ であるような $W(k,q)$ の中のすべてのベクトル $\underline{c}$，$\underline{c}^t = (c_0, c_1, \cdots, c_{k-1})$，からなる集合とすると、$S_{k,q}$ の中の v_k個のベクトルは、有限射影幾何 $PG(t,q)$ の v_kの点とみなすことができる。Hamada [20] による次の定理は、$k \geqq 3$，$1 \leqq d < q^{k-1}$ の場合に、問題1.2と問題1.3 の間の関係を表す重要な定理である。

(<u>定理2.1</u>)　Fを$S_{k,q}$ の中のf個 $(1 \leqq f < v_k-1)$ のベクトルからなる集合とする。Gを $S_{k,q} \setminus F$ の中のv_k-f個の列ベクトルを並べてできる$k \times (v_k-f)$ 行列とし、CをGによって生成される$V(n,q)$ のk次元部分空間とする。 ここに、$n = v_k - f$ である。

(1)　$W(k,q)$ の非零ベクトル $\underline{z}$ に対して、

$$H_z = \{ \underline{y} \in S_{k,q} \mid \underline{z}^t \underline{y} = 0 \text{ over } GF(q) \} \qquad (2.1)$$

とおくと、H_z は PG(k-1,q) における hyperplane で、Cのコードベクトル $\underline{z}^t G$ の重み

w（$\underline{z}^t G$）は、次の式で与えられる。

$$w(\underline{z}^t G) = |F \cap H_z| + q^{k-1} - f \qquad (2.2)$$

（2）　$k \geq 3$, $1 \leq d < q^{k-1}$ の場合には、Cが Griesmer bound (1.1) の等号を満たす $[n, k, d; q]$-code であるための必要十分条件は、F が $\{v_k - n, v_{k-1} - n + d; k-1, q\}$-minihyper であることである。

(**定義2.1**)　C_1, C_2 を $[n, k, d; q]$-code とする。このとき、ある転置行列Pとある正則な（GF(q)の元をもつ）対角行列Dに対して、$G_2 = G_1 D P$（または、$G_2 = G_1 P D$）を満たす C_i（$i=1, 2$）の生成行列 G_i が存在するならば、C_1 と C_2 は同値であるという。

(**注2.1**)　定理2.1と定義2.1より、次のことが成り立つ。

（1）　$k \geq 3$, $1 \leq d < q^{k-1}$ の場合には、Griesmer bound (1.1) の等号を満たすすべての同値でない $[n, k, d; q]$-code からなる集合とすべての $\{v_k - n, v_{k-1} - n + d; k-1, q\}$-minihyper からなる集合の間には、1対1の対応がある。

（2）　特に、dが (1.2) のように表される場合には、Griesmer bound (1.3) の等号を満たすすべての同値でない $[n, k, d; q]$-code からなる集合と (1.4) によって与えられる整数fとmをパラメータにもつすべての $\{f, m; k-1, q\}$-minihyper からなる集合との間には、1対1の対応がある。

(**注2.2**)　(1.4) によって与えられる整数fとmをパラメータにもつ$S_{k,q}$の中の $\{f, m; k-1, q\}$-minihyper Fが存在し、PG(k-1, q) の任意の hyperplane H に対して、

$$|F \cap H| = m_1, m_2, \cdots, \text{ or } m_r \qquad (2.3)$$

（$0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_r$）であるならば、定理2.1の方法によって作られるk次元部分空間Cは重み分布 $1 + n_1 z^{w_1} + n_2 z^{w_2} + \cdots + n_r z^{w_r}$ をもち、かつ、Griesmer bound (1.3) の等号を満たす $[n, k, d; q]$-code である。ただし、dは (1.2) によって与えられる整数で

$$w_i = m_i + q^{k-1} - f, \quad n_i = (q-1) x_i, \qquad (2.4)$$

x_i は $|F \cap H| = m_i$ を満たす PG(k-1, q) の中の hyperplane の数を表す。

3. 定理1と定理2の証明

定理1を証明するために、(q^2+1)-cap に関する次の補題を用いる。（詳細は、Hirschfeld [52] の中の Lemma 16.1.6 を参照）

(**補題3.1**)　ΩをPG(3, q) のすべての点からなる集合とし、$T = \{Q_i \mid i=1, 2, \cdots, q^2+1\}$ をΩの中の (q^2+1)-cap とし、$\tilde{F} = \Omega \setminus T$ とおく。

（1）　PG(3, q) の任意の 2-flat Δ に対して、$|\tilde{F} \cap \Delta| = q^2$ または $q^2 + q$ である。

（2）　PG(3, q) の任意の 2-flat Δ に対して、$|T \cap \Delta| = 1$ または $q+1$ である。

（3）　Fは $\{v_2+(q-1)v_3, v_1+(q-1)v_2; 3, q\}$-minihyper である。

（4）　n_{ij} $(1 \leqq i \leqq q^2+1, 1 \leqq j \leqq q+1)$ を $Q_i \in \Delta$ かつ $|T \cap \Delta| = j$ を満たす PG(3,q) の 2-flat Δ の数とすると、任意の整数 i に対して、$n_{i1} = 1$, $n_{i,q+1} = q^2+q$ である。

（<u>定理1の証明</u>）　$F = (\Omega \setminus \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_{q^2}\}) \cup \{P_1, P_2, \cdots, P_q\}$ であるから、$|F| = |\tilde{F}| + v_2 = 2v_2 + (q-1)v_3$ である。

Hを PG(4,q) の任意の 3-flat (i.e., hyperplane) とする。

<u>Case 1.</u> $H = \Omega$.　$|F \cap H| = |\Omega| - q^2 = q^3+q+1 \geqq q^2+1 = 2v_1 + (q-1)v_2$

<u>Case 2.</u> $H \neq \Omega$.　$\Delta = H \cap \Omega$ とおくと、ΔはHとΩに含まれる 2-flat である。

$$T = \{P, Q_1, Q_2, \cdots, Q_{q^2}\}, \quad \tilde{F} = \Omega \setminus T, \quad T_0 = T \setminus \{P\},$$

$$L = \{P, P_1, P_2, \cdots, P_q\}, \quad L_0 = L \setminus \{P\}$$

とおくと、補題3.1より $|T \cap \Delta| = 1$ or $q+1$, $|F \cap H| = (q^2+q+1) - |T_0 \cap \Delta| + |L_0 \cap H|$ である。

（A）　$P \in \Delta$ の場合　$|T_0 \cap \Delta| = |T \cap \Delta| - 1$, $|L_0 \cap H| = 0$ or q であるから

①　$|F \cap H| = q^2+1,\ q^2+q+1$ or q^2+2q+1

②　$|F \cap H| = q^2+2q+1 \Leftrightarrow |T \cap \Delta| = 1$ かつ $|L \cap H| = q+1$

が成り立つ。

（B）　$P \notin \Delta$ の場合　$|T_0 \cap \Delta| = |T \cap \Delta|$, $|L_0 \cap H| = |L \cap H| = 1$ であるから $|F \cap H| = q^2+1$ or q^2+q+1 である。

以上より、Fは定理1の中の条件（1）を満たす $\{2v_2+(q-1)v_3, 2v_1+(q-1)v_2; 4, q\}$-minihyper で、かつ、$x_3 = 1$, $x_4 = 1$ である。

PG(4,q) の中には 3-flat がv_5個あり、Fの任意の点Pに対して、Pを含む 3-flat はv_4個あるから、次の2つの式が成り立つ。

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = v_5 = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1,$$

$$(q^2+1)x_1 + (q^2+q+1)x_2 + (q^2+2q+1)x_3 + (q^3+q+1)x_4 = |F|\,v_4$$

これより、$x_1 = q^4 - q$, $x_2 = q^3 + q^2 + 2q - 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ を得る。

（<u>定理2の証明</u>）　定理1と注2.2より、定理2を得る。

（<u>注3.1</u>）　q＝3の場合には、最近、浜田等によって、すべての $\{2v_2+2v_3, 2v_1+2v_2; 4, 3\}$-minihyper の特徴付けが行われた。

References

[1] B. I. Belov, V. N. Logachev and V. P. Sandimrov, Construction of a class of linear binary codes achieving the Varshamov-Griesmer bound, Problems of Info. Transmission **10** (3) (1974), 211-217.

[2] R. C. Bose, Mathematical theory of the symmetrical factorial design, Sankhyā **8** (1947), 107-166.

[3] R. C. Bose, On some connections between the design of experiments and information theory, Bull. Inst. Internat. Statist. **38** (1961), 257-271.

[4] R. C. Bose and J. N. Srivastava, On a bound useful in the theory of factorial designs and error correcting codes, Ann. Math. Statist. **35** (1964), 408-414.

[5] A. E. Brouwer and N. J. A. Sloane, "Tables of Codes", in "Handbook of Coding Theory", edited by R. Brualdi, W. C. Huffman and V. Pless, North-Holland, Amsterdam, 1994, to appear.

[6] A. R. Calderbank and W. M. Kantor, The geometry of two-weight codes. Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 97-122.

[7] L. R. A. Casse and D. G. Glynn, On the uniqueness of (q+1)-arcs of PG(4,q), $q = 2^h$, $h \geq 3$, Discrete Math. **48** (1984), 173-186.

[8] R. H. F. Denniston, Some maximal arcs in finite projective planes, J. Combin. Theory **6** (A) (1969), 317-319.

[9] S. M. Dodunekov, On the achievement of the Solomon-Stiffler bound, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences **39** (1986), 39-41.

[10] S. M. Dodunekov, T. Helleseth, N. Manev and Ø. Ytrehus, New bounds on binary linear codes of dimension eight, IEEE Trans. Inform. Theory **33** (1987), 917-919.

[11] P. G. Farrel, Linear binary anticodes, Electron. Lett. **6** (1970), 419-421.

[12] R. A. Fisher, The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of groups, Ann. Eugen. Lond. **11** (1942), 341-353.

[13] R. A. Games, The packing problem for projective geometries over GF(3) with dimension greater than five, J. Combin. Theory **35** (A) (1983), 126-144.

[14] D. G. Glynn, The non-classical 10-arc of PG(4,9), Discrete Math. **59** (1986), 43-51.

[15] V. D. Goppa, Codes on algebraic curves, Soviet Math. Doklady **24** (1981), 170-172.

[16] V. D. Goppa, Geometry and Codes, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[17] P. P. Greenough and R. Hill, Optimal ternary quasi-cyclic codes, preprint.

[18] J. H. Griesmer, A bound for error-correcting codes, IBM J. Res. Develop. **4** (1960), 532-542.

[19] N. Hamada, Characterization resp. nonexistence of certain q-ary linear codes attaining the Griesmer bound, Bull. Osaka Women's Univ. **22** (1985), 1-47.

[20] N. Hamada, Characterization of minihypers in a finite projective geometry and its applications to error-correcting codes, Bull. Osaka Women's Univ. **24** (1987), 1-24.

[21] N. Hamada, Characterization of {(q+1)+2,1;t,q}-minihypers and {2(q+1)+2,2;2,q}-minihypers in a finite projective geometry, Graphs Combin. **5** (1989), 63-81.

[22] N. Hamada, A characterization of some [n,k,d;q]-codes meeting the Griesmer bound using a minihyper in a finite projective geometry, Discrete Math. **116** (1993), 229-268.

[23] N. Hamada, A survey of recent work on characterization of minihypers in PG(t,q)

and nonbinary linear codes meeting the Griesmer bound, J. Combin. Inform. Syst. Sci. **18** (1993), to appear.

[24] N. Hamada and M. Deza, Characterization of $\{2(q+1)+2, 2; t, q\}$-minihypers in PG(t,q) ($t \geq 3$, $q \geq 5$) and its applications to error-correcting codes, Discrete Math. **71** (1988), 219-231.

[25] N. Hamada and M. Deza, A characterization of some [n,k,d;q]-codes meeting the Griesmer bound for given integers $k \geq 3$, $q \geq 5$ and $d = q^{k-1}-q^{\alpha}-q^{\beta}-q^{\gamma}$ ($0 \leq \alpha \leq \beta < \gamma < k-1$ or $0 \leq \alpha < \beta \leq \gamma < k-1$), Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **16** (1988), 321-338.

[26] N. Hamada and M. Deza, A survey of recent works with respect to a characterization of an [n,k,d;q]-code meeting the Griesmer bound using a minihyper in a finite projective geometry, Discrete Math. **77** (1989), 75-87.

[27] N. Hamada and M. Deza, A characterization of $\{v_{\mu+1}+\varepsilon, v_{\mu}; t, q\}$-minihypers and its applications to error-correcting codes and factorial designs, J. Statist. Plann. Inference **22** (1989), 323-336.

[28] N. Hamada and M. Deza, A characterization of $\{2v_{\alpha+1}+2v_{\beta+1}, 2v_{\alpha}+2v_{\beta}; t, q\}$-minihypers in PG(t,q) ($t \geq 2$, $q \geq 5$ and $0 \leq \alpha < \beta < t$) and its applications to error-correcting codes, Discrete Math. **93** (1991), 19-33.

[29] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{3v_2, 3v_1; t, q\}$-minihypers and some $\{2v_2+v_{\gamma+1}, 2v_1+v_{\gamma}; t, q\}$-minihypers ($q = 3$ or 4, $2 \leq \gamma < t$) and its applications to error-correcting codes, Bull. Osaka Women's Univ. **27** (1990), 49-107.

[30] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some minihypers in a finite projective geometry PG(t,4), European J. Combin. **11** (1990), 541-548.

[31] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some linear codes over GF(4) meeting the Griesmer bound, Math. Japonica **37** (1992), 231-242.

[32] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some minihypers in PG(t,q) ($q = 3$ or 4) and its applications to error-correcting codes, Lecture Notes in Mathematics **1518** (1992), 43-62, Springer, Berlin.

[33] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{2v_{\alpha+1}+v_{\gamma+1}, 2v_{\alpha}+v_{\gamma}; k-1, 3\}$-minihypers and some $[n, k, 3^{k-1}-2\cdot 3^{\alpha}-3^{\gamma}; 3]$-codes ($k \geq 3$, $0 \leq \alpha < \gamma < k-1$) meeting the Griesmer bound, Discrete Math. **104** (1992), 67-81.

[34] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{3v_{\mu+1}, 3v_{\mu}; k-1, q\}$-minihypers and some $[n, k, q^{k-1}-3q^{\mu}; q]$-codes ($k \geq 3$, $q \geq 5$, $1 \leq \mu < k-1$) meeting the Griesmer bound, submitted for publication.

[35] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{v_2+2v_3, v_1+2v_2; k-1, 3\}$-minihypers and some $[v_k-30, k, 3^{k-1}-21; 3]$-codes meeting the Griesmer bound, J. Statist. Plann. Inference **34** (1993), 387-402.

[36] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some ternary codes meeting the Griesmer bound, Proceedings of the second international conference on finite fields: Theory, Applications and Algorithms, Las Vegas 17-21 August 1993.

[37] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some minihypers and codes meeting the Griesmer bound over GF(q), $q > 9$, Lecture Notes in Pure and Applied Math. Ser. **141** (1992), 105-122, Marcel Dekker, New York.

[38] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some q-ary codes ($q > (h-1)^2$, $h \geq 3$) meeting the Griesmer bound, Math. Japonica **38** (1993), 925-939.

[39] N. Hamada, T. Helleseth and Ø. Ytrehus, Characterization of $\{2(q+1)+2, 2; t, q\}$-minihypers in PG(t,q) ($t \geq 3$, $q \in \{3,4\}$), Discrete Math. **115** (1993), 175-185.

[40] N. Hamada, T. Helleseth and Ø. Ytrehus, There are exactly two nonequivalent [20,5,12;3]-codes, Ars Combin. **35** (1993), 3-14.
[41] N. Hamada, T. Helleseth and Ø. Ytrehus, The nonexistence of [51,5,33;3]-codes, Ars Combin. **35** (1993), 25-32.
[42] N. Hamada, T. Helleseth and Ø. Ytrehus, On the construction of a $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$-code meeting the Griesmer bound, Designs, Codes and Cryptography **2** (1992), 225-229.
[43] N. Hamada, T. Helleseth and Ø. Ytrehus, A new class of nonbinary codes meeting the Griesmer bound, Discrete Applied Math., to appear.
[44] N. Hamada and F. Tamari, On a geometrical method of construction of maximal t-linearly independent sets, J. Combin. Theory **25** (A) (1978), 14-28.
[45] N. Hamada and F. Tamari, Construction of optimal codes and optimal fractional factorial designs using linear programming, Ann. Discrete Math. **6** (1980), 175-188.
[46] N. Hamada and F. Tamari, Construction of optimal linear codes using flats and spreads in a finite projective geometry, European J. Combin. **3** (1982), 129-141.
[47] R. W. Hamming, Error detection and error correcting codes, Bell. System. Tech. J. **29** (1950), 147-160.
[48] T. Helleseth, A characterization of codes meeting the Griesmer bound, Inform. and Control **50** (1981), 128-159.
[49] R. Hill, Caps and codes, Discrete Math. **22** (1978), 111-137.
[50] R. Hill and D. E. Newton, Some optimal ternary linear codes, Ars Combin. **25** A (1988), 61-72.
[51] R. Hill and D. E. Newton, Optimal ternary linear codes, Designs, Codes and Cryptography, to appear.
[52] J. W. P. Hirschfeld, Finite projective space of three dimensions, Oxford University Press, 1985.
[53] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes, (North-Holland Mathematical Library Vol. **16** (1977), Amsterdam).
[54] D. E. Newton, Optimal ternary linear codes, Ph.D. Thesis, University of Salford, 1990.
[55] V. Pless, On the uniqueness of the Golay codes, J. Combin. Theory **5** (1968), 215-228.
[56] B. Qvist, Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I (1952), 134.
[57] G. Solomon and J. J. Stiffler, Algebraically punctured cyclic codes, Inform. and Control **8** (1965), 170-179.
[58] F. Tamari, A note on the construction of optimal linear codes, J. Statist. Plann. Inference **5** (1981), 405-411.
[59] F. Tamari, On linear codes which attain the Solomon-Stiffler bound, Discrete Math. **49** (1984), 179-191.
[60] J. A. Thas, Some results concerning $\{(q+1)(n-1);n\}$-arcs and $\{(q+1)(n-1)+1;n\}$-arcs in finite projective plane of order q, J. Combin. Theory **19** (A) (1975), 228-232.
[61] H. C. A. van Tilbolg, On the uniqueness resp. nonexistence of certain codes meeting the Griesmer bound, Inform. and Control **44** (1980), 16-35.
[62] J. F. Voloch, Arcs in projective planes over prime fields, J. Geom. to appear.